ESCOLA SECUNDÁRIA DE ALCÁCER DO SAL

Ano Lectivo 2000/2001

12º Ano   Ficha de Trabalho

1. Num lago, a relação entre a intensidade ***I*** da luz (em lúmens) a uma profundidade de ***x*** metros é dada por

$\log_{10}\frac{I}{12} = -0.05x$ ($\log_{10}\frac{I}{12}$ representa o logaritmo de $\frac{I}{12}$ na base 10)

a) Qual é a intensidade de luz à profundidade de 10 metros?
b) Mostra que $I(x) = 12 \times 10^{-0.05x}$.
c) Considerando que o lago tem 100 metros de profundidade, calcula $I(0)$ e $I(100)$ e explica o significado de cada um destes valores.
d) A partir de que profundidade é a intensidade da luz inferior a $\frac{1}{4}$ lúmen?
e) Explica de que forma resolverias a alínea anterior utilizando exclusivamente a calculadora gráfica.

2. Os biólogos afirmam que sob condições ideais o número de bactérias numa cultura cresce segundo a lei $Q(t) = 3000e^{kt}$, com t expresso em horas.
Supondo que existem 6000 bactérias 20 minutos depois do início da contagem do tempo, quantas bactérias existirão, aproximadamente, após uma hora ?

3. Resolve, em IR, as seguintes condições:

a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-x^2-2} - 4^{-x} = 0$

b) $2^{|x+1|} \leq \sqrt{32}$

4. O nível ***N***, em decibéis, de um som audível pode ser dado por $N = 170 + 10\log_{10} I$, onde I é o valor da intensidade, em certa unidade, do som emitido.

a) Determina o nível de um som de intensidade 0.001.
b) Sabe-se que um som de nível superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde. Conclui daí, a partir de que intensidade devem ser utilizados meios de protecção auditiva.

5. Considera a função $f : x \to \frac{-2 + \log_3\left(5 - \frac{x}{2}\right)}{3}$.

a) Determina o domínio da função.
b) Determina os zeros da função, se existirem.
c) Resolve a condição $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.
d) Caracteriza a função inversa de f.

ESCOLA SECUNDÁRIA DE ALCÁCER DO SAL

Ano Lectivo 2000/2001

12º Ano — Correcção da Ficha de Trabalho

1.a) $x = 10 \quad \mathrm{I} = ?$

$$\log\frac{I}{12} = -0.05\times 10 \Leftrightarrow \log\frac{I}{12} = -0.5 \Leftrightarrow 10^{-0.5} = \frac{I}{12} \Leftrightarrow I = 12\times 10^{-0.5} \Leftrightarrow I \approx 3.79 \text{ lúmen}$$

R: A intensidade de luz é de, aproximadamente, 3.79 lúmen.

b) $\log\frac{I}{12} = -0.05x \Leftrightarrow 10^{-0.05x} = \frac{I}{12} \Leftrightarrow I = 12\times 10^{-0.05x}$

$$x \to I(x) = 12\times 10^{-0.05x}$$

c) $I(0) = 12\times 10^{-0.05\times 0} = 12\times 10^{0} = 12 \text{ lúmen}$

$I(100) = 12\times 10^{-0.05\times 100} = 12\times 10^{-5} = 0.00012 \text{ lúmen}$

$I(0)$ representa a intensidade de luz ao nível da água do lago (profundidade zero) e $I(100)$ representa a intensidade de luz no fundo do lago. Como a função $x \to I(x) = 12\times 10^{-0.05x}$ está definida no intervalo $[0;100]$ e é nele estritamente decrescente, $I(0)$ é o máximo da função e $I(100)$ é o mínimo.

d)

$$I(x) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 12\times 10^{-0.05x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 10^{-0.05x} < \frac{1}{48} \Leftrightarrow 10^{-0.05x} < 10^{\log\frac{1}{48}} \Leftrightarrow -0.05x < \log\frac{1}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\log\frac{1}{48}}{-0.05} \Leftrightarrow x > 33.62 \text{ m (aprox.)}$$

R: A partir dos 33.62 metros de profundidade, aproximadamente.

e) Depois de introduzir na calculadora a expressão analítica da função, definiria uma janela de visualização do seu gráfico adequada. Nesse procedimento deveria ter em conta que a variável independente x representa a profundidade, que varia entre os zero e os cem metros e a variável dependente I representa a intensidade da luz e varia entre os 0.00012 e 12 lúmen.

Uma vez que a função I é estritamente decrescente no seu domínio, bastaria encontrar a que profundidade se verifica uma intensidade de luz de $\frac{1}{4}$ lúmen e saberia automaticamente que, a partir desse valor de x, a intensidade de luz seria inferior a $\frac{1}{4}$ lúmen. Poderia determinar esse valor de x de 3 formas:

- traçando a recta de equação $y=\frac{1}{4}$ e encontrando a sua intersecção com o gráfico da função I;
- através da função *x-calculate* disponível na calculadora, uma vez que a função I é injectiva;
- procurando na tabela de valores da função para que valor de x se tem $I(x)= \frac{1}{4}$.

2. $20m=\frac{1}{3}h$ logo $Q\left(\frac{1}{3}\right)=6000 \Leftrightarrow 3000e^{k\frac{1}{3}}=6000 \Leftrightarrow e^{k\frac{1}{3}}=2 \Leftrightarrow \ln 2=k\frac{1}{3} \Leftrightarrow k=\frac{\ln 2}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k \approx 2.1$

Então $Q(t)=3000e^{2.1t}$ e consequentemente $Q(1) \approx 3000e^{2.1\times 1} \approx 24499$ bactérias .

3.a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-x^2-2}-4^{-x}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4^3}\right)^{-x^2-2}=4^{-x} \Leftrightarrow \left(4^{-3}\right)^{-x^2-2}=4^{-x} \Leftrightarrow 4^{3x^2+6}=4^{-x} \Leftrightarrow 3x^2+6=-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2+x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times 3\times 6}}{2\times 3} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-71}}{6}$ impossível em IR, logo C.S. $=\{\ \}$

b)

$2^{|x+1|} \le \sqrt{32} \Leftrightarrow 2^{|x+1|} \le \sqrt{2^5} \Leftrightarrow 2^{|x+1|} \le 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow |x+1| \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow x+1 \le \frac{5}{2} \wedge x+1 \ge -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2} \wedge x \ge -\frac{7}{2}$

$C.S.=\left[-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right]$

4. a) $I=0.001$ N = ?

$N=170+10\log_{10}0.001 \Leftrightarrow N=140$ decibéis

b) $N \ge 100 \Leftrightarrow 170+10\log_{10}I \ge 100 \Leftrightarrow 10\log_{10}I \ge -70 \Leftrightarrow \log_{10}I \ge -7 \Leftrightarrow \log_{10}I \ge \log_{10}10^{-7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I \ge 10^{-7}$

R: Devem ser utilizados meios de protecção para intensidades superiores a 10^{-7} unidades.

5. a) $D_f=\left\{x\in IR: 5-\frac{x}{2}>0\right\}=\left\{x\in IR: -\frac{x}{2}>-5\right\}=\{x\in IR: x<10\}=\left]-\infty;10\right[$

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2+\log_3\left(5-\frac{x}{2}\right)}{3}=0 \Leftrightarrow -2+\log_3\left(5-\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \log_3\left(5-\frac{x}{2}\right)=2 \Leftrightarrow 3^2=5-\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4=-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=-8 \quad \wedge \quad x\in D_f$, logo a função tem um zero para $x=-8$.

c)

$\frac{-2+\log_3\left(5-\frac{x}{2}\right)}{3} \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2+\log_3\left(5-\frac{x}{2}\right) \ge -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3\left(5-\frac{x}{2}\right) \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3\left(5-\frac{x}{2}\right) \ge \log_3 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-\frac{x}{2} \ge 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} \ge \sqrt{3}-5 \Leftrightarrow x \le 10-2\sqrt{3} \quad \wedge \quad x\in D_f$, logo $C.S.=\left]-\infty;10-2\sqrt{3}\right]$

d)

$\frac{-2+\log_3\left(5-\frac{x}{2}\right)}{3}=y \Leftrightarrow \log_3\left(5-\frac{x}{2}\right)=3y+2 \Leftrightarrow 3^{3y+2}=5-\frac{x}{2} \Leftrightarrow -5+3^{3y+2}=-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=10-2\times 3^{3y+2}$

$f^{-1}: x \to 10-2\times 3^{3x+2}$

$D_{f^{-1}}=D'_f=IR$ e $D'_{f^{-1}}=D_f=\left]-\infty;10\right[$