

ESCOLA SECUNDÁRIA DE ALCÁCER DO SAL

Ano Lectivo 2000/2001

11º Ano

Ficha de Trabalho

1. Determina o termo geral das seguintes sucessões:

a) $0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \dots$

b) $-\frac{2}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{6}, -\frac{8}{7}, -\frac{10}{8}, -\frac{12}{9}, -\frac{14}{10}, \dots$

2. Considera a sucessão $u_n = -\frac{2n}{n+1}$.

a) Escreve os cinco primeiros termos da sucessão.

b) Averigua se $-\frac{27}{14}$ é termo da sucessão.

c) Mostra que a sucessão tem termos superiores a $-1,9$.

d) Estuda a monotonia da sucessão.

e) Mostra que $-2 < u_n \leq -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

f) Descreve, num breve texto, de que forma procederias para resolver as alíneas anteriores utilizando exclusivamente a calculadora gráfica.

3. Averigua se a sucessão $t_n = \frac{-7-n}{2}$ é progressão aritmética.

4. De uma progressão geométrica sabe-se que a razão é $\frac{2}{3}$ e a soma dos cinco primeiros termos é $-\frac{422}{81}$.

a) Determina o primeiro termo da progressão.

b) Escreve o termo geral da progressão.

c) Pronuncia-te quanto à monotonia da progressão, justificando.

5. Justifica, utilizando os teoremas dados, que as sucessões seguintes são infinitamente grandes ou infinitésimos:

a) $2n^{-3}$

c) $10 - \sqrt{n}$

b) $2n + \frac{1}{n}$

d) $n^3 - n$

ESCOLA SECUNDÁRIA DE ALCÁCER DO SAL

Ano Lectivo 2000/2001

11º Ano

Correcção da Ficha de Trabalho

1. a) $u_n = n^2 - 1$

b) $v_n = -\frac{2n}{n+3}$

2. a) $-1, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{5}, -\frac{5}{3}$

b)

$$-\frac{2n}{n+1} = -\frac{27}{14} \Leftrightarrow -\frac{2n}{n+1(14)} = -\frac{27}{14(n+1)} \Leftrightarrow -2n \cdot 14 = -27(n+1) \Leftrightarrow -28n = -27n - 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -28n + 27n = -27 \Leftrightarrow -n = -27 \Leftrightarrow n = 27$$

Como $27 \in \mathbb{N}$, $-\frac{27}{14}$ é o 27º termo da sucessão

c)

$$-\frac{2n}{n+1} > -1.9 \Leftrightarrow -\frac{2n}{n+1} > -\frac{19}{10} \Leftrightarrow -\frac{2n}{n+1(10)} > -\frac{19}{10(n+1)} \Leftrightarrow -2n \cdot 10 > -19(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -20n > -19n - 19 \Leftrightarrow -20n + 19n > -19 \Leftrightarrow -n > -19 \Leftrightarrow n < 19$$

Todos os termos de ordem inferior a 19, são superiores a -1.9.

d)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2(n+1)}{n+1+1} - \frac{-2n}{n+1} = \frac{-2n-2}{n+2} + \frac{2n}{n+1} = \frac{(-2n-2)(n+1) + 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-2n^2 - 2n - 2n - 2 + 2n^2 + 4n}{(n+2)(n+1)} =$$
$$= \frac{-2}{(n+2)(n+1)} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ logo a sucessão é monótona decrescente.}$$

e) Como a sucessão é decrescente, $u_1 = -1$ é o maior dos termos da sucessão, logo um majorante do conjunto de termos. Assim, $u_n \leq -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, efectuando a divisão de $-2n$ por $n+1$, sabemos que

$$u_n = -\frac{2n}{n+1} = -2 + \frac{2}{n+1} > -2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Logo, podemos concluir que a sucessão é limitada e}$$

$$-2 < u_n \leq -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-7-(n+1)}{2} - \frac{-7-n}{2} = \frac{-7-n-1+7+n}{2} = -\frac{1}{2} \text{ é constante logo a sucessão é uma progressão}$$

aritmética de razão $-\frac{1}{2}$

4. a) $R = \frac{2}{3}$ e $S_5 = -\frac{422}{81}$

$$S_5 = u_1 \cdot \frac{1-R^5}{1-R} \Leftrightarrow -\frac{422}{81} = u_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow -\frac{422}{81} = u_1 \cdot \frac{1-\frac{32}{243}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow -\frac{422}{81} = u_1 \cdot \frac{\frac{211}{243}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow -\frac{422}{81} = u_1 \cdot \frac{211}{81} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{-\frac{422}{81}}{\frac{211}{81}} \Leftrightarrow u_1 = -\frac{422}{211} = -2$$

b) $R = \frac{2}{3}$ e $u_1 = -2$ logo o termo geral da progressão geométrica é $u_n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

c) É uma progressão geométrica em que $0 < R < 1$ e $u_1 < 0$, logo é monótona crescente.

5. a)

Como $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ (sucessão de referência) e $\left|\frac{1}{n^3}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right|, \forall n \in \mathbb{N}$ então pelo Teor.5, $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$. Se $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$ então $2 \cdot \frac{1}{n^3} = 2n^{-3} \rightarrow 0$ pelo Teor.6.

b)

Como $n \rightarrow +\infty$ (sucessão de referência), $2n \rightarrow +\infty$ pelo Teor.3. Como $2n + \frac{1}{n} > 2n, \forall n \in \mathbb{N}$ então pelo Teor.1, $2n + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$.

c)

Como $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ (sucessão de referência), $\sqrt{n} - 10 \rightarrow +\infty$ pelo Teor.2. Logo $-(\sqrt{n} - 10) = -\sqrt{n} + 10 = 10 - \sqrt{n} \rightarrow -\infty$

d)

Como $n \rightarrow +\infty$ (sucessão de referência) e $n^3 - n = n(n^2 - 1) \geq n$, para $n \geq 2$, $n^3 - n \rightarrow +\infty$ pelo Teor.1.